ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНАЯ ГЕОМЕТРИЯ МНОГООБРАЗИЙ ФИГУР
Вып.13 1982

Н.И.Шевченко

НОРМАЛИЗАЦИЯ ПОЛОСЫ

В проективном пространстве рассматривается полоса, для которой вводится понятие нормализации, позволяющей задавать связность в ассоциированном главном расслоении. Результаты настоящей работы содержатся в докладе [1], где исследуется более широкое расслоение.

Отнесем n-мерное проективное пространство P_n к подвижному реперу $\{A, A_\mathcal{J}\}$, инфинитезимальные перемещения которого определяются формулами

$$dA = \omega A + \omega^\mathcal{J} A_\mathcal{J} \quad (\mathcal{I}, \mathcal{J}, \mathcal{K} = \overline{1,n}),$$

$$dA_\mathcal{J} = \omega A_\mathcal{J} + \omega_\mathcal{J}^\mathcal{K} A_\mathcal{K} + \omega_\mathcal{J} A,$$

где ω-форма Пфаффа $(d\omega = \omega^\mathcal{J} \wedge \omega_\mathcal{J})$, а инвариантные формы проективной группы удовлетворяют структурным уравнениям

$$d\omega^\mathcal{J} = \omega^\mathcal{K} \wedge \omega_\mathcal{K}^\mathcal{J}, \quad d\omega_\mathcal{J} = \omega_\mathcal{J}^\mathcal{K} \wedge \omega_\mathcal{K}$$

$$d\omega_\mathcal{K}^\mathcal{J} = \omega_\mathcal{K}^\mathcal{I} \wedge \omega_\mathcal{I}^\mathcal{J} + (\delta_\mathcal{K}^\mathcal{J} \omega_\mathcal{I} + \delta_\mathcal{I}^\mathcal{J} \omega_\mathcal{K}) \wedge \omega^\mathcal{I}.$$

В пространстве P_n рассмотрим полосу $L_h(X_m)$, т.е. m-поверхность X_m, к каждой точке которой присоединена h-плоскость L_h, проходящая через соответствующую касательную m-плоскость T_m. Произведем адаптацию подвижного репера $\{A, A_i, A_a, A_\alpha\}$, где индексы принимают значения:

$$i, j, k = \overline{1,m}; \quad a, b, c = \overline{m+1,h}; \quad \alpha, \beta = \overline{h+1,n}.$$

Вершину A совместим с текущей точкой поверхности X_m, вершины A_i расположим на касательной плоскости T_m и вершины A_a – на плоскости L_h. Система уравнений полосы $L_h(X_m)$ в таком репере имеет вид

$$\omega^a = 0, \quad \omega^\alpha = 0;$$

$$\omega_i^a = \Lambda_{ij}^a \omega^j, \quad \omega_i^\alpha = \Lambda_{ij}^\alpha \omega^j, \quad \omega_a^\alpha = \Lambda_{ai}^\alpha \omega^i.$$

Замыкая первую подсистему, получим $\Lambda_{ij}^a = \Lambda_{ji}^a$, $\Lambda_{ij}^\alpha = \Lambda_{ji}^\alpha$. Продолжая вторую подсистему, найдем

$$\nabla\Lambda_{ij}^a + \Lambda_{ij}^\alpha \omega_\alpha^a \equiv 0, \quad \nabla\Lambda_{ij}^a \equiv 0, \quad \nabla\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_{ij}^\alpha \omega_a^j \equiv 0,$$

где дифференциальный оператор ∇ действует следующим образом:

$$\nabla\Lambda_{ai}^\alpha = d\Lambda_{ai}^\alpha - \Lambda_{aj}^\alpha \omega_i^j - \Lambda_{bi}^\alpha \omega_a^b + \Lambda_{ai}^\beta \omega_\beta^\alpha,$$

а символ $\equiv$ означает сравнение по модулю базисных форм ω^i. Совокупность функций $\Lambda = \{\Lambda_{ij}^a, \Lambda_{ij}^\alpha, \Lambda_{ai}^\alpha\}$ будем называть фундаментальным объектом 1-го порядка полосы $L_h(X_m)$, рассматриваемой как специальное m-мерное многообразие троек (A, T_m, L_h).

С полосой $L_h(X_m)$ ассоциируется расслоение $H(X_m)$ со структурными уравнениями

$$d\omega^i = \omega^j \wedge \omega_j^i,$$

$$d\omega_j^i = \omega_j^k \wedge \omega_k^i + \omega^k \wedge \omega_{jk}^i,$$

$$d\omega_i = \omega_i^j \wedge \omega_j + \omega^j \wedge \omega_{ij},$$

$$d\omega_b^a = \omega_b^c \wedge \omega_c^a + \omega^i \wedge \omega_{bi}^a,$$

$$d\omega_a^i = \omega_a^j \wedge \omega_j^i + \omega_a^b \wedge \omega_b^i + \omega^j \wedge \omega_{aj}^i,$$

$$d\omega_a = \omega_a^i \wedge \omega_i + \omega_a^b \wedge \omega_b + \omega^i \wedge \omega_{ai},$$

где
$$\omega_{jk}^{i}=\Lambda_{jk}^{a}\omega_{a}^{i}+\Lambda_{jk}^{\alpha}\omega_{\alpha}^{i}-\delta_{j}^{i}\omega_{k}-\delta_{k}^{i}\omega_{j},$$
$$\omega_{ij}=\Lambda_{ij}^{a}\omega_{a}+\Lambda_{ij}^{\alpha}\omega_{\alpha},\quad \omega_{aj}^{i}=\Lambda_{aj}^{\alpha}\omega_{\alpha}^{i}-\delta_{j}^{i}\omega_{a},$$
$$\omega_{bi}^{a}=\Lambda_{bi}^{\alpha}\omega_{\alpha}^{a}-\Lambda_{ij}^{a}\omega_{b}^{j}-\delta_{b}^{a}\omega_{i},\quad \omega_{ai}=\Lambda_{ai}^{\alpha}\omega_{\alpha}.$$

Базой главного расслоения $H(X_m)$ является поверхность X_m, а типовым слоем – группа H, действующая на тройке (A, T_m, L_h).

Фундаментально-групповую связность в главном расслоении $H(X_m)$ зададим по Лаптеву [2] с помощью поля объекта связности $\Gamma=(\Gamma_{jk}^{i}, \Gamma_{ij}, \Gamma_{bi}^{a}, \Gamma_{aj}^{i}, \Gamma_{ai})$ на базе X_m:
$$\nabla\Gamma_{jk}^{i}+\omega_{jk}^{i}\equiv 0,\quad \nabla\Gamma_{ij}+\Gamma_{ij}^{k}\omega_{k}+\omega_{ij}\equiv 0,$$
$$\nabla\Gamma_{bi}^{a}+\omega_{bi}^{a}\equiv 0,\quad \nabla\Gamma_{aj}^{i}-\Gamma_{kj}^{i}\omega_{a}^{k}+\Gamma_{aj}^{b}\omega_{b}^{i}+\omega_{aj}^{i}\equiv 0,$$
$$\nabla\Gamma_{ai}-\Gamma_{ji}\omega_{a}^{j}+\Gamma_{ai}^{j}\omega_{j}+\Gamma_{ai}^{b}\omega_{b}+\omega_{ai}\equiv 0.$$

Т е о р е м а 1. Для определения связности в расслоении $H(X_m)$ достаточно задать 4-членную композицию [3] $\{(A, P_{m-1}, P_{h-m-1}, P_{n-h-1})\}$, оснащающие элементы которой связаны с полосой $L_h(X_m)$ следующим образом: а/ плоскость P_{m-1} является нормалью 2-го рода в смысле А.П.Нордена; б/ плоскость P_{h-m-1} принадлежит плоскости L_h и не имеет общих точек с касательной плоскостью T_m; в/ плоскость P_{n-h-1} не пересекается с плоскостью L_h.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Оснащающие плоскости $P_{m-1}, P_{h-m-1}, P_{n-h-1}$ зададим системами точек
$$B_i=A_i+\lambda_i A,\quad B_a=A_a+\lambda_a^{i}A_i+\lambda_a A,$$
$$B_\alpha=A_\alpha+\lambda_\alpha^{a}A_a+\lambda_\alpha^{i}A_i+\lambda_\alpha A,$$

причем
$$\nabla\lambda_i+\omega_i=\lambda_{ij}\omega^{j},\quad \nabla\lambda_a+\lambda_a^{i}\omega_i+\omega_a=\lambda_{ai}\omega^{i},$$
$$\nabla\lambda_a^{i}+\omega_a^{i}=\lambda_{aj}^{i}\omega^{j},\quad \nabla\lambda_\alpha^{i}+\lambda_\alpha^{a}\omega_a^{i}+\omega_\alpha^{i}=\lambda_{\alpha j}^{i}\omega^{j},\qquad (1)$$
$$\nabla\lambda_\alpha^{a}+\omega_\alpha^{a}=\lambda_{\alpha i}^{a}\omega^{i},\quad \nabla\lambda_\alpha+\lambda_\alpha^{i}\omega_i+\lambda_\alpha^{a}\omega_a+\omega_\alpha=\lambda_{\alpha i}\omega^{i}.$$

Композиционное оснащение, указанное в теореме, задается полем квазитензора $\lambda=(\lambda_i, \lambda_a^{i}, \lambda_a, \lambda_\alpha^{a}, \lambda_\alpha^{i}, \lambda_\alpha)$ на базе X_m. Фундаментальный объект Λ и оснащающий квазитензор λ позволяют охватить компоненты объекта связности Γ по формулам:
$$\Gamma_{jk}^{i}=\Lambda_{jk}^{a}\lambda_a^{i}+\Lambda_{jk}^{\alpha}(\lambda_\alpha^{i}-\lambda_\alpha^{a}\lambda_a^{i})-\delta_j^{i}\lambda_k-\delta_k^{i}\lambda_j,$$
$$\Gamma_{ij}=\Lambda_{ij}^{a}\lambda_a-\lambda_i\lambda_j+\Lambda_{ij}^{\alpha}(\lambda_\alpha-\lambda_\alpha^{a}\lambda_a),$$
$$\Gamma_{bi}^{a}=\Lambda_{bi}^{\alpha}\lambda_\alpha^{a}-\delta_b^{a}\lambda_i-\lambda_b^{j}M_{ij}^{a},$$
$$\Gamma_{aj}^{i}=\Lambda_{aj}^{\alpha}\lambda_\alpha^{i}-\delta_j^{i}\mu_a-\lambda_b^{i}\lambda_a^{k}M_{jk}^{b},$$
$$\Gamma_{ai}=\Lambda_{ai}^{\alpha}\lambda_\alpha-\mu_a\lambda_i-\lambda_b\lambda_a^{j}M_{ij}^{b},$$

где
$$M_{ij}^{a}=\Lambda_{ij}^{a}-\Lambda_{ij}^{\alpha}\lambda_\alpha^{a},\quad \mu_a=\lambda_a-\lambda_a^{i}\lambda_i.$$

О п р е д е л е н и е. Нормализацией полосы $L_h(X_m)$ назовем присоединение к каждой точке базисной поверхности X_m нормали 1-го рода P_{n-m} и нормали 2-го рода P_{m-1} в смысле А.П.Нордена, а также нормали 3-го рода-плоскости P_{n-h+m}, пересекающей плоскость L_h по касательной плоскости T_m.

Т е о р е м а 2. Нормализация полосы $L_h(X_m)$ дает возможность построить ее композиционное оснащение.

Д о к а з а т е л ь с т в о. Нормаль 1-го рода P_{n-m} зададим системой уравнений $x^i = \lambda^i_a x^a + \mu^i_\alpha x^\alpha$, причем

$$\nabla \mu^i_\alpha - \lambda^i_a \omega^a_\alpha + \omega^i_\alpha = \mu^i_{\alpha j} \omega^j. \qquad (2)$$

Нормаль 2-го рода P_{m-1} ,определяемая точками B_i, входит в состав композиционного оснащения. Нормаль 3-го рода P_{n-h+m} зададим системой уравнений $x^a = \lambda^a_\alpha x^\alpha$. Нормализация полосы $L_h(X_m)$ определяется полем квазитензора $\mu = (\lambda^i_a, \mu^i_\alpha, \lambda_i, \lambda^a_\alpha)$ на базе X_m. Доказательство сводится к построению компонент $\lambda^i_\alpha, \lambda_a, \lambda_\alpha$, оснащающего квазитензора λ с помощью нормализующего квазитензора μ. Компоненты λ^i_α находятся следующим образом: $\lambda^i_\alpha = \mu^i_\alpha + \lambda^a_\alpha \lambda^i_a$. Для построения компонент λ_a, λ_α продолжим систему уравнений (1_3),(2):

$$\nabla \lambda^i_{aj} - \lambda^i_b \omega^b_{aj} + \lambda^k_a \omega^i_{kj} + \omega^i_{aj} \equiv 0,$$

$$\nabla \mu^i_{\alpha j} + \mu^i_\beta (\delta^\beta_\alpha \omega_j + \Lambda^\beta_{jk} \omega^k_\alpha + \Lambda^\beta_{aj} \omega^a_\alpha) +$$

$$+ \mu^k_\alpha \omega^i_{kj} - \lambda^i_{aj} \omega^a_\alpha + \lambda^i_a \Lambda^a_{jk} \omega^k_\alpha - \delta^i_j \omega_\alpha \equiv 0.$$

Формулы охвата имеют вид

$$\lambda_a = \frac{1}{m}[\mu^i_\alpha (\Lambda^\alpha_{ai} + \Lambda^\alpha_{ij} \lambda^j_a) + \Lambda^b_{ij} \lambda^i_b \lambda^j_a - \lambda^i_{ai}],$$

$$\lambda_\alpha = \frac{1}{m}[\mu^i_\beta (\Lambda^\beta_{ij} \lambda^j_\alpha + \Lambda^\beta_{ai} \lambda^a_\alpha) + \Lambda^a_{ij} \lambda^i_a \lambda^j_\alpha - \mu^i_{\alpha i} - \lambda^i_{ai} \lambda^a_\alpha].$$

З а м е ч а н и е. Нормализацию полосы $L_h(X_m)$ можно представить в другой форме, а именно, к каждой точке базисной поверхности X_m присоединить: 1/нормаль 2-го рода P_{m-1}; 2/плоскость P_{n-h} ,пересекающую плоскость L_h лишь в точке A; 3/плоскость P_{h-m}, принадлежащую плоскости L_h и пересекающую касательную плоскость T_m в той же точке. М.М. Похила построил [4] внутренним образом поля плоскостей, входящих в обе формы нормализации.

Список литературы

1. Ш е в ч е н к о Ю.И. Обобщенная нормализация полосы в проективном пространстве.-В кн.: Всес.научн.конф. по неевклидовой геом."150 лет геометрии Лобачевского", Казань, 1976, с.214.

2. Евтушик Л.Е., Лумисте Ю.Г., Остиану Н.М., Широков А.П. Дифференциально-геометрические структуры на многообразиях.-В кн.: Проблемы геометрии, Т.9, М., 1979, с.7-246.

3. Н о р д е н А.П. Многочленные композиции и теория распределений.- Изв.вузов.Матем., 1978, №11, с.87-97.

4. П о х и л а М.М. Инвариантные оснащения многомерных полос проективного пространства.-В кн.: Всес. научн.конф.по неевклид.геом."150 лет геометрии Лобачевского", Казань, 1976, с.170.